TEMA 2: DIVISIBILIDAD

DIVISIBILIDAD

- Conceptos de múltiplo y divisor (ejemplos):

  - *Del 2* → **2,4,6,8,10,12,14,16,…**
  - *Del 3* → **3,6,9,12,15,18,21,24,…**

Por ejemplo:

"Diremos que 8 es múltiplo de 2 o que 2 es divisor de 8"

DIVISIBILIDAD

- <u>Conceptos de múltiplo y divisor (definiciones):</u>

*"Sean a y b de $\mathbb{Z}$, se dice que b es un **múltiplo** de a cuando exista un K de $\mathbb{Z}$, tal que a*K=b. También se dice que a es un **divisor** de b."*

*<u>CONVENIO:</u> A partir de ahora escribiremos a*K=aK*

DIVISIBILIDAD

PROPIEDADES

1) Si a es un divisor de b y b es un divisor de c $\Rightarrow$ *a es un divisor de c*

Demostración

a es un divisor de *b* $\Rightarrow$ **existe K de $\mathbb{Z}$ tal que aK=b**

b es un divisor de c $\Rightarrow$ **existe H de $\mathbb{Z}$ tal que bH=c**

sustituyendo b en la segunda: **aKH=c** $\Rightarrow$ **a(KH)=c**

Como K, H son de $\mathbb{Z}$*, también KH es de* $\mathbb{Z}$ $\Rightarrow$ ***a* ES UN DIVISOR DE *c***

DIVISIBILIDAD

PROPIEDADES

2) Si a es un divisor de b y a es un divisor de c → *a es un divisor de b+c*

Demostración

Como **aK=b** y **aH=c**, se sigue que **a(K+H)=b+c** → ***a*** **ES UN DIVISOR DE b+c**

NOTA IMPORTANTE: Análoga propiedad se tiene para la resta

DIVISIBILIDAD

PROPIEDADES

3) Si a es un divisor de b

y a es un divisor de c ⇒ *a es un divisor de bc*

Demostración

Como aK=b y aH=c, se sigue que a^2KH=a(aKH)=bc ⇒

Como a, K, H son de $\mathbb{Z}$, *también aKH es de $\mathbb{Z}$* ⇒ ***a* ES UN DIVISOR DE bc**

NOTA: No sucede lo mismo con la división: ver contraejemplo

DIVISIBILIDAD

NÚMEROS PRIMOS Y COMPUESTOS

Definición: Los **números primos** son aquellos números naturales mayores que 1 que no tienen más divisores que a ellos mismos y a 1.

Alternativamente, son aquellos número naturales que tienen exactamente dos divisores distintos.

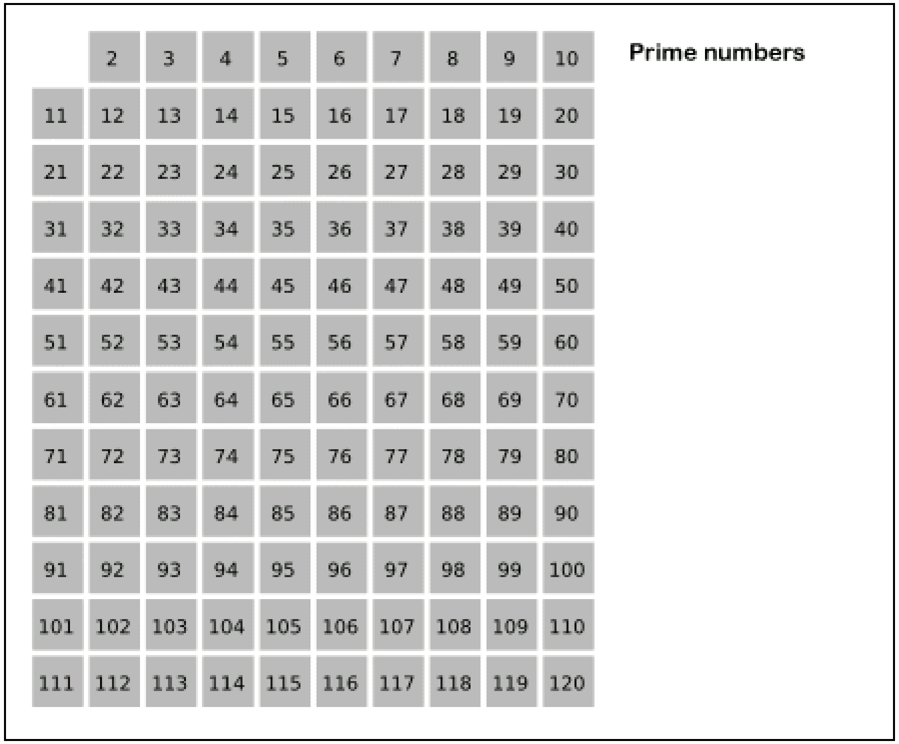
Llamaremos **números compuestos** a aquellos que no son primos.

Conjeturas de Goldbach (s.XVIII):

- ***CONJETURA FUERTE: Todo número par mayor que 2 se puede expresar como suma de dos primos***
- ***CONJETURA DÉBIL: Todo número impar mayor que 5 se puede expresar como suma de tres números primos (Probada por el peruano Haral Helfgott en 2013)***

DIVISIBILIDAD

¿Cómo obtener todos los números primos menores que 120 (o cualquier otro)? Mediante la Criba de Eratóstenes:



DIVISIBILIDAD

FACTORIZACIÓN DE UN NÚMERO

Sea N un número compuesto

Si $N = d_1 K$ siendo *K de* $\mathbb{Z}$ *y* $d_1 < N$

Ahora d_1 puede ser primo o compuesto, si es compuesto:

$d_1 = d_2 L$ siendo L *de* $\mathbb{Z}$ ⇒ **$N = d_2 L K$**

Y así sucesivamente mientras se pueda

y análogamente con K y L ⇒

"TODO NÚMERO COMPUESTO SE PUEDE FACTORIZAR (EXPRESAR COMO PRODUCTO DE NÚMEROS PRIMOS)"

DIVISIBILIDAD

CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD

Se basan en la expresión polinomial del número, escrito dcba:

$$N=d*1000+c*100+b*10+a$$

-Criterio del 2

-Criterio del 3

-Criterio del 5

-Criterio del 11

DIVISIBILIDAD

CRITERIO DEL 2

$$N=d*1000+c*100+b*10+a$$

2 será divisor de N cuando divida a cada uno de los sumandos en que se ha descompuesto, lo que es obvio para los tres primeros:

$$N=d*500*2+c*50*2+b*5*2+a=2*(d*500+c*50+b*5)+a$$

N será divisible entre 2 cuando a sea múltiplo de 2 (es decir, debe ser 0,2 o cifra par)

DIVISIBILIDAD

CRITERIO DEL 3

$$N=d*1000+c*100+b*10+a$$

$$N=(d*333*3+d)+(c*33*3+c)+(b*3*3+b)+a$$

$$\Rightarrow N=3*(d*333+c*33+b*3)+(d+c+b+a)$$

N será divisible entre 3 cuando lo sea la suma de sus cifras

DIVISIBILIDAD

CRITERIO DEL 5

$$N=d*1000+c*100+b*10+a$$

$$N=d*200*5+c*20*5+b*2*5+a$$

$$\Rightarrow N=5*(d*200+c*20+b*2)+a$$

N será divisible entre 5 cuando lo sea a, es decir, si a es 0 ó 5

DIVISIBILIDAD

CRITERIO DEL 11

$$N=d*1000+c*100+b*10+a$$

$$N=(d*91*11-d)+(c*9*11+c)+(b*11-b)+a$$

$$\Longrightarrow \quad N=11*(d*91+c*9+b)+(-d+c-b+a)$$

N será divisible entre 11 cuando la suma de sus cifras en lugar impar menos la suma de sus cifras en lugar par sea divisible entre 11

DIVISIBILIDAD

CONJUNTO DE DIVISORES

Dados dos números se puede plantear el problema de determinar qué divisores tiene cada uno y cuáles son comunes.

EJEMPLO: Consideremos los números 180 y 1050

$$180=2^2x3^2x5$$

(2,4,6,20, etc.)

Los divisores se obtendrán combinando de todas las formas posibles los factores que aparecen en la factorización del número 180. En forma de cuadro:

DIVISIBILIDAD

<u>CONJUNTO DE DIVISORES (I):</u> Vamos por partes

1	2	2^2
3	$3x2=6$	$3x2^2 =12$
3^2	$3^2 x2 =18$	$3^2 x2^2 =36$

$2^A x\ 3^B$ → **Habría un total de (A+1)x(B+1) divisores**

DIVISIBILIDAD

CONJUNTO DE DIVISORES (II):

Ahora todos deben multiplicarse también por 5 que es el último factor

$1x5=5$	$2x5=10$	$2^2x5=20$
$3x5=15$	$3x2x5=30$	$3x2^2x5=60$
$3^2x5=45$	$3^2x2x5=90$	$3^2x2^2x5=180$

En total $(2+1)x(2+1)x(1+1)=18$

DIVISIBILIDAD

CONJUNTO DE DIVISORES (III):

Luego los divisores de 180 son:

Divisores(180)={1,2,3,4,5,6,9,10,12,15,18,20,30,36,45,60,90,180}

Con un procedimiento análogo tendríamos:

$1050=2x3x5^2x7$ → 1050 tiene (1+1)x(1+1)x(2+1)x(1+1)=24 divisores

Divisores(1050)={1,2,3,5,6,7,10,14,15,21,25,30,35,42,50,70,75,105,150,175,210,350,525,1050}

DIVISIBILIDAD

MÁXIMO COMÚN DIVISOR:

Los divisores comunes serían:

Divisores comunes(180,1050)={1,2,3,5,6,10,15,30}

Al mayor de los divisores comunes se le llama máximo común divisor

NOTA: Nuestro procedimiento ha sido muy laborioso. Veamos otra forma de hacerlo

DIVISIBILIDAD

MÁXIMO COMÚN DIVISOR:

Usando las factorizaciones de ambos números:

$$180=2^2x3^2x5$$

$$1050=2x3x5^2x7$$

El máximo común divisor de varios números es igual al número formado al multiplicar los factores comunes con el menor exponente

m.c.d.(180,1050)=2x3x5=30

DIVISIBILIDAD

PROPIEDADES DEL MÁXIMO COMÚN DIVISOR:

- **Si el m.c.d.(a,b) = d, entonces existen dos enteros primos entre sí a’ y b’ de forma que a = a’d y b = b’d.**
- **m.c.d.(k·a,k·b) = k · m.c.d.(a,b)**
- **m.c.d.(a,0) = a si a≠0.**
- **Si c divide a a y b, entonces c divide a m.c.d(a,b).**
- **Si un número natural divide al producto de dos números y es primo entre sí con uno de ellos entonces ha de dividir al otro. Más generalmente, si un número primo p divide al producto de dos enteros a·b, entonces ha de dividir a a o a b.**
- **(Identidad de Bézout): El m.c.d. (a,b) positivo d, puede expresarse como combinación lineal de a y b: d = s·a + t·b**

DIVISIBILIDAD

Existen métodos alternativos para factorizar números grandes:

- **PROCEDIMIENTO DE RESTA:**

m.c.d.(a,b)=m.c.d.(a-b,b)

Veamos la prueba y algunos ejemplos en la pizarra

- **PROCEDIMIENTO DE DIVISIÓN (Algoritmo Euclides):**

Si D=n x c+r → **m.c.d.(D,n)=m.c.d.(n,r)**

Veamos la prueba y algunos ejemplos en la pizarra

DIVISIBILIDAD

MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO:

Definición: Se llama mínimo común múltiplo al múltiplo común más pequeño de los números dados

Ejemplo:

$$180=2^2x3^2x5$$

$$1050=2x3x5^2x7$$

$$m.c.m.(180,1050)=2^2x\ 3^2x5^2x7$$

DIVISIBILIDAD

PROPIEDADES MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

1. **Si dos números se multiplican o dividen por un mismo número su m.c.m. queda multiplicado o dividido por dicho número.**

2. Consecuencia directa de la definición es que todo múltiplo común de dos números lo es también de su m.c.m.

DIVISIBILIDAD

RELACIÓN MÁXIMO COMÚN DIVISOR Y MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO:

m.c.d.(a,b)x m.c.m.(a,b)=axb

En nuestro ejemplo:

m.c.d.(180,1050)=2x3x5=30 y

m.c.m(180,1050)= 2^2x 3^2x5^2x7=6300

m.c.d.(180,1050) x m.c.m(180,1050)=

=(2x3x5)x(2^2x3^2x5^2x7)=(2^2x3^2x5)x(2x3x5^2x7)=

=180x1050