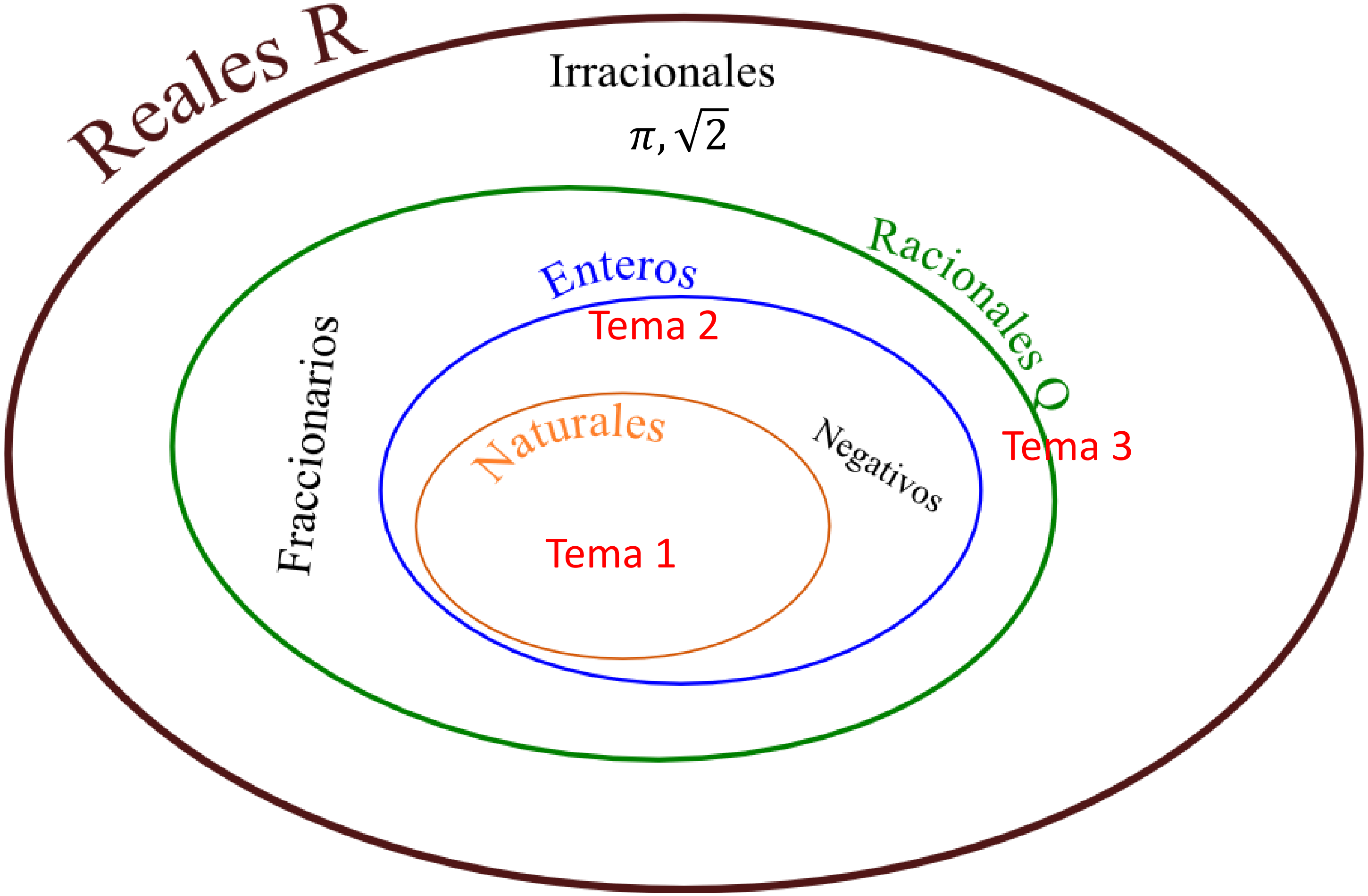
TEMA 3: FRACCIONES Y DECIMALES

Tipos de números



Definición de fracción

En general, la palabra fracción indica un par ordenado de números enteros escritos de la forma

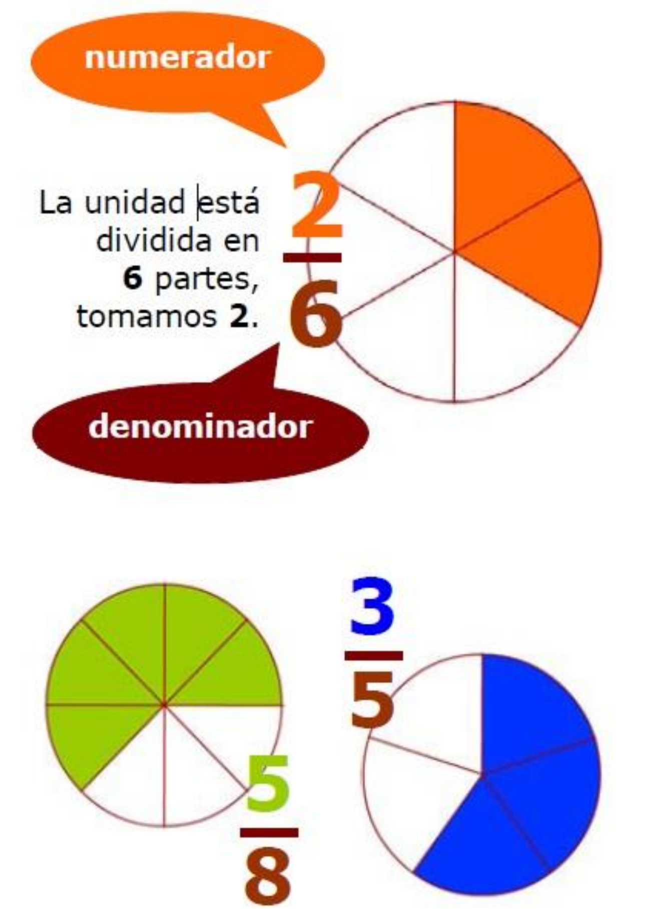
$$\mathbf{n/d} \quad \text{o} \quad \boldsymbol{\frac{n}{d}} \quad (\text{con } d \neq 0)$$

- Al número **n** se le llamará numerador de la fracción y a **d** denominador de la fracción.
- Este concepto se usa en muchos contextos y situaciones diferentes (repartos, medida, etc.)

La fracción como parte-todo

- Dado un todo dividido en tantas partes **iguales** como representa el denominador, el numerador indica cuántas partes tomamos.
- El todo también recibe el nombre de "unidad" y puede ser continuo o discreto.

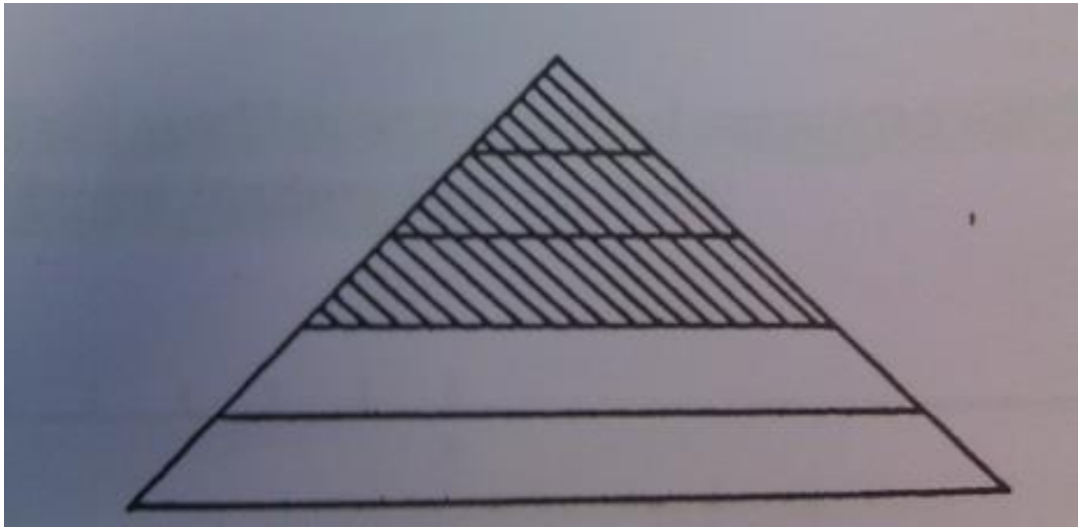
Ejemplo continuo:



Ejemplo discreto:
En una clase de 40 alumnos, $\frac{1}{4}$ de la clase serán 10 alumnos.

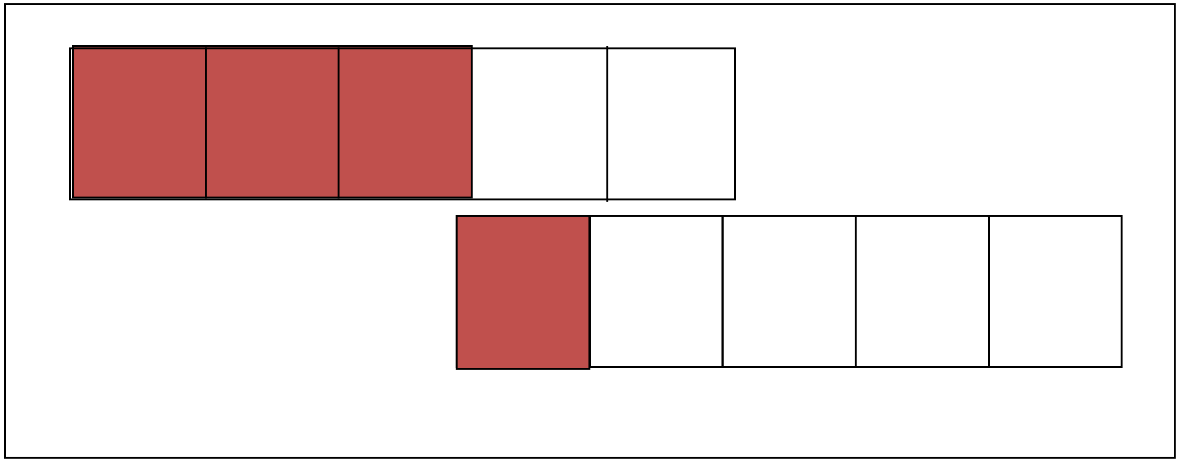
¡Cuidado!

¡La zona sombreada no es 3/5 del triángulo!



¡Cuidado!

Si tenemos un par de tabletas de chocolate como las de la figura, la pregunta "¿Qué fracción está sombreada?" es ambigua y tiene más de una respuesta



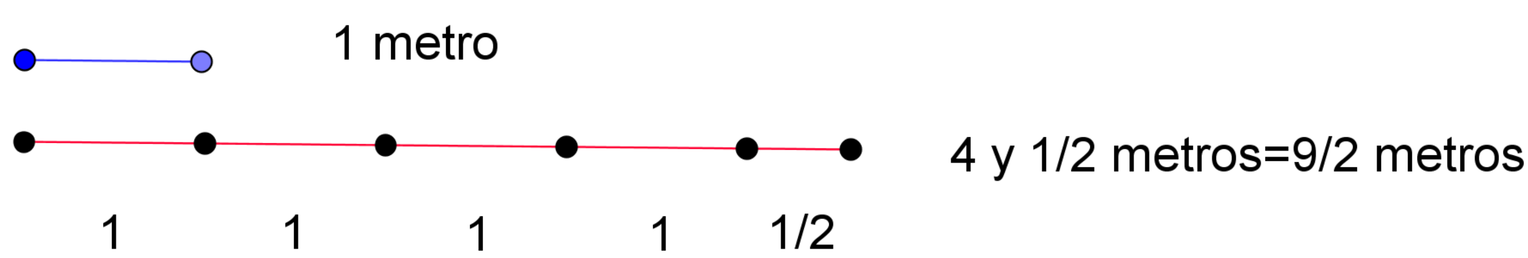
4/10 del total

4/5 de una tableta

La fracción como medida

- La fracción también puede aparecer como resultado de un proceso de medida.

Ejemplo:



La fracción como reparto

- La fracción también puede aparecer como resultado de un proceso de reparto.

Ejemplos:

Queremos repartir 3 tortillas entre 4 personas. ¿Cuánta tortilla comerá cada uno?

Queremos repartir 5 galletas entre 2 personas. ¿Cuántas galletas recibirá cada una?

La fracción como operador

- La fracción también puede aparecer como un operador

Ejemplos:

Calcula los 2/3 de 45.

Calcula ¼ de 60.

Vocabulario matemático

- Una fracción **propia** es aquella que es menor que 1.

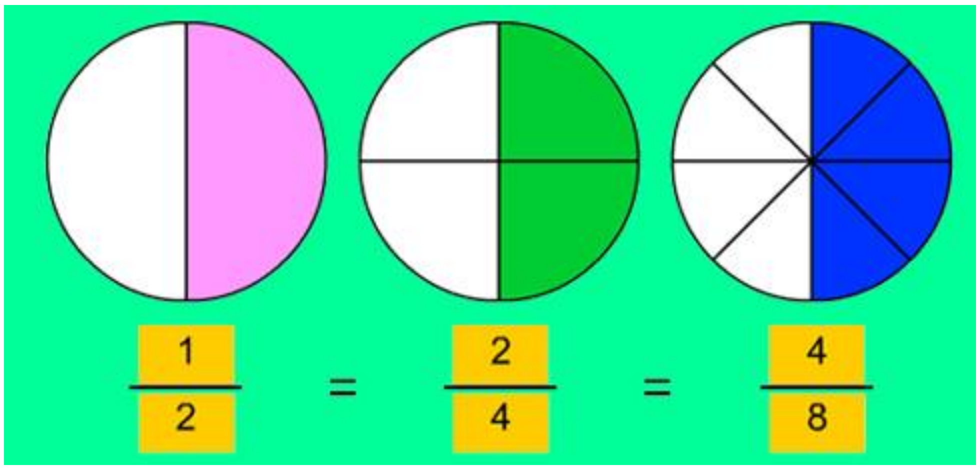
  Ejemplo: $\frac{2}{3}$

- Una fracción **impropia** es aquella que es mayor que 1. Se pueden escribir como un **número mixto,** que es aquel compuesto por un número entero y una fracción propia.

  Ejemplo: $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$

Fracciones equivalentes

Modelo parte-todo: si representan la misma parte del todo



Luego $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$ para cualesquiera a,b,c (b,c ≠0)

Hay definiciones análogas en los otros modelos

¿Cómo determinar si dos fracciones son equivalentes?

Proposición:

Dos fracciones a/b y c/d son EQUIVALENTES si y solo $ad= bc$.

Dem. (en pizarra)

Fracción irreducible

Definición: entre todas las fracciones equivalentes existe una, que llamaremos **IRREDUCIBLE**, donde el numerador y el denominador NO tienen factores comunes.

- Para encontrar la fracción irreducible de una dada, basta dividir numerador y denominador por el M.C.D. de ambos.
- Cualquier fracción equivalente se obtiene a partir de la fracción irreducible multiplicando por un mismo número ambos términos de la fracción.

Definición de número racional

La relación de equivalencia descrita permite agrupar a las fracciones en grupos:

1 / 2 = 2 / 4 = 3 / 6 = 4 / 8 = 5 / 10 = ...
1 / 3 = 2 / 6 = 3 / 9 = 4 / 12 = 5 / 15 = ...
2 / 3 = 4 / 6 = 6 / 9 = 8 / 12 = 10 / 15 = ...

- Cada uno de estos grupos se conoce como **número racional** y la fracción más sencilla (IRREDUCIBLE) numéricamente de cada grupo se denomina **representante canónico de este número racional**.

Suma y resta de fracciones

Con denominadores comunes:

$$\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} \pm \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{b}} = \frac{\mathrm{a} \pm \mathrm{c}}{\mathrm{b}}$$

En general:

$$\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} \pm \frac{c}{d} = \frac{a\,d}{b\,d} + \frac{cb}{bd} = \frac{ad \pm cb}{bd}$$

Para trabajar con números más pequeños…

X 14 Tengo que multiplicar al numerador por el mismo número

$$\frac{1}{6} + \frac{5}{12} + \frac{6}{21} = \frac{14}{84} + \frac{35}{84} + \frac{24}{84} = \frac{73}{84}$$

X 14 X 7

¿Por cuánto he multiplicado a 6 para que se convierta en 84?

84 : 6 = 14

1º SE BUSCA UN DENOMINADOR COMÚN

Recomendación: Busca **el m.c.m. (es el menor)**

m.c.m. (6, 12, 21)=m.c.m. (2x3, 2^2 x 3, 7x3)= 2^2 x 3x7= 84

2º Se sustituyen los denominadores por el m.c.m.

3º Se multiplica al numerador por el mismo número por el que se ha multiplicado al denominador

Producto y cociente de fracciones

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a\,c}{bd}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Orden de números racionales

- Si dos fracciones comparten denominador, la mayor es la de mayor numerador

  Ejemplo: $\frac{3}{8} < \frac{4}{8}$

- Si dos fracciones comparten numerador, la mayor es la de menor denominador.

  Ejemplo: $\frac{3}{8} < \frac{3}{5}$

Orden de números racionales

En general, **¿cuándo un número racional es mayor que otro?**

Por ejemplo, ¿cuál es mayor, 3/8 o 2/5?

Se suele responder hallando fracciones equivalentes con mismo numerador o denominador:

$$\frac{3}{8} = \frac{15}{40}, \quad \frac{2}{5} = \frac{16}{40}$$

Por tanto, $\frac{3}{8} = \frac{15}{40} < \frac{16}{40} = \frac{2}{5}$

Orden de números racionales

¿Cómo se puede encontrar un número racional que esté entre otros dos? ¿Es posible siempre?

SÍ (el cuerpo de los números racionales es “denso”)

Por ejemplo, busca un número racional mayor que 1/8 y menor que 2/5.

Forma 1: transformamos las fracciones dadas en otras equivalentes con igual denominador.

$$\frac{1}{8} = \frac{5}{40} < \frac{16}{40} = \frac{2}{5}$$

Algunos números racionales entre ellos:

6/40, 7/40, …,15/40

Orden de números racionales

Forma 2: usamos la media aritmética.

$$\frac{1}{8} < \frac{\frac{1}{8} + \frac{2}{5}}{2} < \frac{2}{5}$$

$$\frac{1}{8} < \frac{\frac{5}{40} + \frac{16}{40}}{2} < \frac{2}{5}$$

$$\frac{1}{8} < \frac{21}{80} < \frac{2}{5}$$

Orden de números racionales

Forma 3: usando la socialización de repartos

$$\mathbf{\frac{1}{8} < \frac{1+2}{8+5} < \frac{2}{5}}$$

$$\mathbf{\frac{1}{8} < \frac{3}{13} < \frac{2}{5}}$$

Orden de números racionales

¿Y un número racional mayor que 3/8 y menor que 2/5?

Forma 1: $\frac{3}{8} = \frac{15}{40} = \frac{30}{80} < \frac{32}{80} = \frac{16}{40} = \frac{2}{5}$

Por tanto, valdría el 31/80.

Forma 2: $\frac{\frac{3}{8}+\frac{2}{5}}{2} = \frac{\frac{15}{40}+\frac{16}{40}}{2} = \frac{\frac{31}{40}}{2} = \frac{31}{80}$

Forma 3: $\frac{3+2}{8+5} = \frac{5}{13}$

Expresión decimal de un número racional

Queremos repartir 5 tortillas entre 4 personas. ¿Cuánta tortilla recibe cada uno?

Podemos responder con una fracción: 5/4.

Ahora bien, también se puede repartir usando solo partes de tamaño 1, 1/10, 1/100, etc.

Así, daremos 1 tortilla a cada persona y nos sobrará una tortilla, que dividiremos en 10 partes de tamaño 1/10 de tortilla.

Esas 10 partes las volvemos a repartir entre las 4 personas, obteniendo cada una 2 partes y sobrando otras 2.

Las dos partes de tamaño 1/10 de tortilla que sobran las volvemos a dividir en 10 partes iguales, obteniendo 20 partes de tamaño 1/100 de tortilla. Esas 20 partes se reparten entre las 4 personas, recibiendo 5 cada una.

Por tanto, cada persona recibe 1+2/10 + 5/100.

Esta cantidad también se puede escribir como 1,25, que sería su expresión decimal.

Expresión decimal de un número racional

¿Y si queremos repartir 4 tortillas entre 3 personas?

Si usamos la misma estrategia, cada persona recibirá:

$1+3 \times 1/10+3\times1/100+3\times1/1000+\ldots=1{,}333\ldots$

¿Y si queremos repartir 5 tortillas entre 6 personas?

Cada persona recibirá:

$8 \times 1/10+3\times1/100+3\times1/1000+\ldots=0{,}833\ldots$

Expresión decimal de un número racional

Por tanto, nos han salido distintos tipos de expresiones decimales: 1,25; 1,333…; 0,8333…

Llamaremos:

1) Número decimal a las expresiones decimales finitas (1,25). Estas se obtienen cuando se dividen por números que son múltiplos de 2 o 5 (o ambos) exclusivamente.
2) Expresión decimal periódica cuando existe una secuencia de números en la parte decimal que se repite. Se dividen en:
   a) las **expresiones decimales periódicas puras** (0,3333…; 0,838383…; 0,673673673…)
   b) las **expresiones decimales periódicas mixtas**, en las que, tras una serie finita de números, hay una repetición del periodo correspondiente (0,16666...).

Cómo escribir la expresión decimal de un racional como una fracción (**generatriz**)

1. Si la expresión decimal es finita (es un número decimal):

   0,6=6/10

   0,235 = 235/1000

Cómo escribir la expresión decimal de un racional como una fracción (**generatriz**)

2. Si la expresión decimal es periódica, podemos encontrar su fracción generatriz así:

2.1.) Expresión decimal periódica pura:

N = a,bcdbcd...

N = (abcd - a) / 999

2.2) Expresión decimal periódica mixta:

N = a,bcdefdef...

N = (abcdef - abc) / 99.900