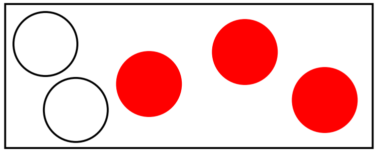
TEMA 4: PROPORCIONALIDAD NUMÉRICA Y PORCENTAJES

Otra interpretación de la fracción

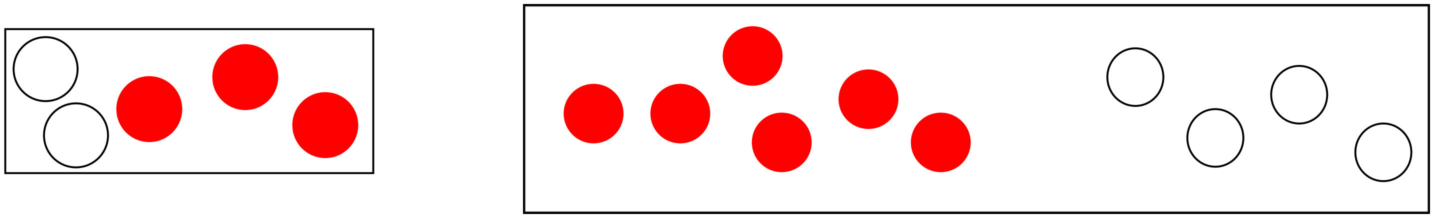
La fracción puede interpretarse también como una razón. Veamos un ejemplo:

Se tiene una urna con 2 bolas blancas y 3 rojas.



La relación entre el número de bolas rojas y el número de bolas blancas viene dada por la razón o cociente entre ambas cantidades, que se simboliza con la fracción 3/2 o con 3:2.

¿Hay otras urnas con la "misma relación" entre el número de bolas rojas y blancas?



Las razones de las dos urnas son 3/2 y 6/4, y se dice que están en proporción, que escribiríamos 3/2=6/4.

Habría más ejemplos:

$$3/2 = 6/4 = 9/6 = 12/8 = \ldots$$

Definiciones

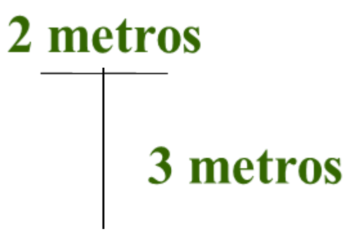
La **razón** entre dos cantidades a y b es la fracción a/b.

Dos **razones** a/b y c/d están **en proporción** cuando ambas razones son equivalentes como fracciones:

a/b, c/d en proporción $\Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow$ a d= b c

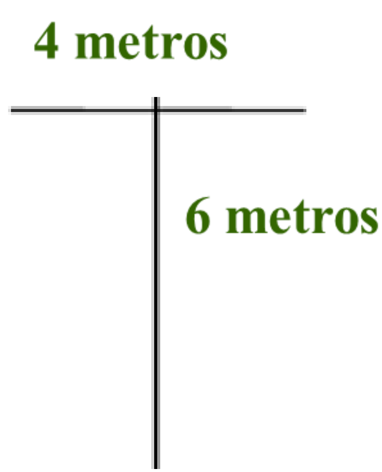
A la igualdad $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se le llama en este contexto **proporción entre dos razones**.

Ejemplo 1



Tenemos una antena compuesta por una barra vertical y una horizontal. La barra vertical tiene una longitud de tres metros, y la barra horizontal tiene una longitud de dos metros. De este modo **la razón entre la longitud horizontal y la longitud vertical** es de 2/3.

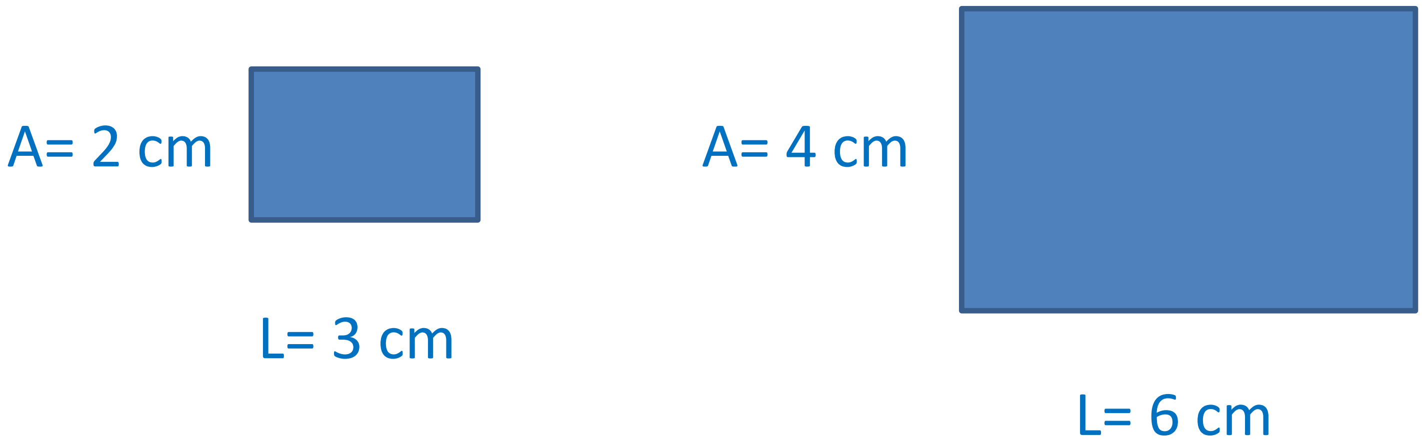
Ahora construimos una antena de longitud horizontal de 4 metros y de longitud vertical de 6 metros:



Las razones entre las longitudes están en proporción, de forma que, más que una división, la proporción nos está indicando una forma de "construcción", un cierto "patrón" de cómo construir antenas similares a la antena pequeña.

Ejemplo 2

La razón entre el ancho y el largo de los siguientes rectángulos están en proporción



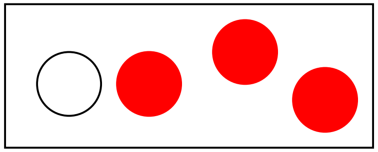
Las razones son 3/2 y 6/4, y se dice que están en proporción, que escribiríamos 3/2=4/6.

Habría más ejemplos:

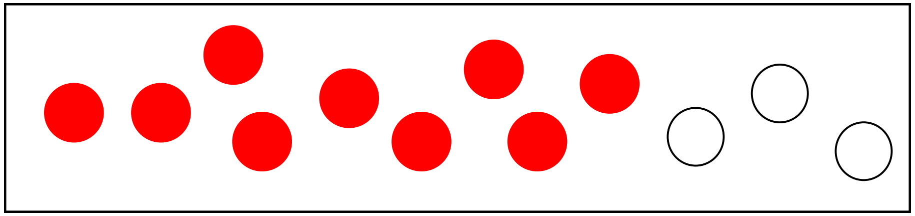
$$3/2 = 6/4 = 9/6 = 12/8 = 1.5/1...$$

Ejemplo 3

Se tiene una urna con 1 bola blanca y tres rojas.



Se quiere tener en la misma urna 9 bolas rojas pero manteniendo la proporción que había inicialmente entre bolas blancas y rojas. ¿Cuántas bolas blancas debe haber?



$$\frac{1}{3} = \frac{x}{9} \Rightarrow x = \frac{9}{3} = 3$$

Solución: 3 bolas blancas

Magnitud es una propiedad, característica física o atributo observable de los cuerpos o situaciones, que se manifiesta en distintos grados o intensidades susceptibles de ser expresadas cuantitativamente.

Ejemplos:

- Longitud
- Superficie
- Volumen
- Masa

Una **cantidad de magnitud** es una manifestación concreta o un caso particular de una magnitud. Se puede medir.

Ejemplos: la longitud de una mesa (3 metros), el área de una pared (25 metros cuadrados), 1/2 kg,1.65 m, etc.

Definición de “directamente proporcional”

Dos cantidades de magnitud son **directamente proporcionales** si el cociente entre ellas (su razón) se mantiene constante. Esto implica que al multiplicar una de ellas por un número, la otra también queda multiplicada por el mismo número (y viceversa).

doble cantidad
triple cantidad
quinta parte

helados	precio
5 vasitos	$ 15
10 vasitos	$ 30
15 vasitos	$ 45
1 vasito	$ 3

doble precio
triple precio
quinta parte

PROPORCIONALIDAD DIRECTA

En la primera columna de la tabla se ubican las cantidades y en la segunda columna colocamos los precios que corresponden a esas cantidades.

$$\frac{5}{15} = \frac{10}{30} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$$

Definición de constante de proporcionalidad

Dadas dos cantidades de magnitud directamente proporcionales x e y, llamaremos constante de proporcionalidad al cociente entre ellas:

$$\boldsymbol{\frac{x}{y} = k}$$

En el ejemplo anterior, la constante de proporcionalidad entre el número de vasitos de helado y su precio es

$$\frac{5}{15} = \frac{10}{30} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$$

La constante de proporcionalidad entre el precio y los vasitos sería:

$$\frac{15}{5} = \frac{30}{10} = \frac{45}{15} = 3$$

Ejemplo 4

Veamos la siguiente tabla de valores:

Nº de bolsas	1	2	3	4	5	6	7	8	k
Peso	**0,25**	**0,5**	**0,75**	**1**	**1,25**	**1,5**	**1,75**	**2**	**0,25k**

Para reconocer si las magnitudes son directamente proporcionales, comprobaremos si es constante la razón entre las cantidades de magnitud, es decir, si existe una constante de proporcionalidad:

$$\frac{0{,}25}{1} = \frac{0{,}5}{2} = \frac{0{,}75}{3} = \cdots = \frac{0{,}25\,k}{k} = 0{,}25$$

Por tanto, las cantidades de magnitud son directamente proporcionales.

Ejemplo 5

Consideremos la siguiente situación de compra:

Por 2 rotuladores nos han cobrado 3 euros. Al día siguiente compramos 6 rotuladores, ¿cuánto nos cobrarán?

Escribiremos primero las razones entre las cantidades de magnitudes (número de rotuladores y precio) :

Precio (en euros)	Nº rotuladores	Razón
3	2	3/2
X	6	x/6

Como un rotulador siempre cuesta lo mismo (equivalentemente, siempre podemos comprar la misma cantidad de ellos con un euro), las razones deben estar en proporción:

$$\frac{3}{2} = \frac{x}{6}$$

de donde, por la propiedad de las fracciones equivalentes, $2x = 3 \cdot 6 \ \rightarrow x = \frac{3 \cdot 6}{2} = 3 \cdot 3 = 9$. Por tanto, nos cobrarán 9 euros por los 6 rotuladores.

Ejemplo 5 (continuación)

¿Qué significa la razón 3/2 en el ejemplo anterior?

3 euros/2 rotuladores =1.5 euros /1 rotulador indica el precio por rotulador (1.5 euros)

¿Qué significaría la razón 2/3?

2 rotuladores/3 euros =$0,\overline{6}$ rotuladores /1 euro indica los rotuladores que podemos comprar con un euro ($0,\overline{6}$).

Definición de “inversamente proporcional”

Dos cantidades de magnitud son **inversamente proporcionales** cuando el producto entre ambas es constante. Esto implica que al multiplicar una de ellas por un número, la otra queda dividida por ese mismo número (y viceversa).

Ejemplo:

Si 3 hombres necesitan 24 días para hacer un trabajo, 6 hombres lo harán en 12 días, 9 hombres en 8 días, etc.

	Nº hombres	Nº días de trabajo	
	3	24	
$\times 2$	6	12	$:2$
$\times 3$	9	8	$:3$

¿Cuánto tardarían 18 hombres?

Observación

Cuando dos cantidades de magnitud son inversamente proporcionales, el cociente entre ambas no es constante. Sin embargo, el producto sí lo es.

Cantidad de magnitud 1	Cantidad de magnitud 2
X	Y
X’	Y’

En este caso:

xy=x’y’=k=constante

También puede escribirse:

$$\frac{x}{x'} = \frac{y'}{y}$$

Ejemplo (solución)

Si 3 hombres necesitan 24 días para hacer un trabajo, 6 hombres lo harán en 12 días, 9 hombres en 8 días, etc. ¿Cuánto tardarían 18 hombres?

Nº hombres	Nº días de trabajo	Cociente	Producto
3	24	3/24	3 x 24=72
6	12	6/12	6 x 12=72
9	8	9/8	9 x 8=72
18	d		18 x d =72

Resolución:

Forma 1: 18 x d =3 x 24=72→ d=72/18=4 días

Forma 2: $\frac{3}{18} = \frac{d}{24}$ → d=3 x 24/18= 4 días

Porcentaje

Definición: Un porcentaje es una razón en la que el denominador es 100. Se suele escribir mediante un signo específico: %.

Ejemplo: si 8 de cada 10 alumnos aprueban una asignatura, el porcentaje de aprobados es del 80%.

También pueden usarse los porcentajes como operadores aplicados a una cantidad de magnitud.

Ejemplo: el 20% de una clase de 50 alumnos, por ejemplo, son 20% de 50=20/100 x 50=10 alumnos.

Ejemplo

En un almacén de leche envasada, el 60 % es leche entera. Si hay un total de 400 envases, ¿cuántos serán de leche entera?

Solución:
Nº de envases de leche entera=60 % de 400=60/100 x 400=240.

Otra forma:

Nº de envases de leche entera	Nº de envases total
X	400
60	100

Por tanto, $\frac{\mathrm{x}}{60} = \frac{400}{100} \rightarrow x = \frac{400 \cdot 60}{100} = 4 \cdot\ 60 = 240,$ luego hay 240 envases de leche entera.

Otro ejemplo

En una clase han aprobado 54 alumnos de un total de 60. ¿Qué porcentaje de alumnos ha aprobado?

Solución:

Nº de alumnos aprobados	Nº de alumnos total
54	60
x	100

Por tanto, $\frac{54}{x} = \frac{60}{100} \rightarrow x = 54 \cdot \frac{100}{60} = \frac{540}{6} = 90,$ luego aprobó el 90%.

Ejemplos de descuentos y aumentos

1. **Si una camisa cuesta 40 euros y nos rebajan un 30%, ¿cuánto tendremos que pagar?**

Forma 1: el descuento es 30% de 40=30/100x40=12 euros, luego pagaremos 40-12=28 euros.
Forma 2: pagaremos el 70% del precio original, luego 70/100 x 40=7 x 4=28 euros.

2. **Si una revista cuesta 5,40 euros y en Canarias su precio es un 10 % más alto, ¿cuánto cuesta la revista en Canarias?**

Forma 1: el suplemento que pagan es de 10/100 x 5,40=0,54 euros, luego costará 5,40+0,54=5,94 euros.
Forma 2: la revista costará un 110% de su precio original, luego 110/100 x 5,40=1,1x5,4=5,94 euros.

Repartos proporcionales

Un reparto proporcional es aquel en el que se reparte una cantidad de magnitud en partes proporcionales.

Los repartos proporcionales pueden ser directos o inversos.

Reparto proporcional directo

Ejemplo: Juan, Pedro y Camilo aceptaron un trabajo y decidieron que cada uno cobraría de acuerdo con las horas trabajadas. Cuando terminaron, habían anotado: "Juan 20 horas, Pedro 12 horas y Camilo 8 horas“. Si recibieron 1.800 como pago total, ¿cuánto recibió cada uno?

Solución:

Nombre	Horas trabajadas	Dinero recibido
Juan	20	X
Pedro	12	Y
Camilo	8	1800-x-y

Entonces

$$\frac{20}{x} = \frac{12}{y} = \frac{8}{1800 - x - y}$$

De donde obtenemos que $\begin{cases} 12x = 20y \\ 8y = 12(1800 - x - y) \end{cases}$

Por tanto, x=900, y=540, lo que significa que Juan recibió 900 euros, Pedro 540 y Camilo 360 euros.

Reparto proporcional inverso

Ejemplo: En una competición, los tres primeros han tardado en hacer el recorrido 8, 10 y 12 minutos respectivamente. El premio consiste en 1295 euros, repartidos en proporción inversa a los tiempos. ¿Cuánto dinero recibe cada uno?

Solución:

Corredor	Minutos tardaron	Dinero recibido
Primero	8	X
Segundo	10	Y
Tercero	12	1295-x-y

Entonces

$$8 \cdot x = 10 \cdot y = 12 \cdot (1295 - x - y)$$

De donde obtenemos que x=525, y=420.

Por tanto, el primero recibe 525 euros, el segundo 420 y el tercero 350.